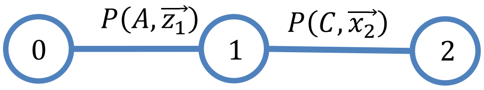
Calculs de vitesses par composition du mouvement

Exercice 1: Eolienne

Question 1: Etablir le graphe des liaisons du système.



Question 2: Exprimer les deux vecteurs rotation de l'éolienne.

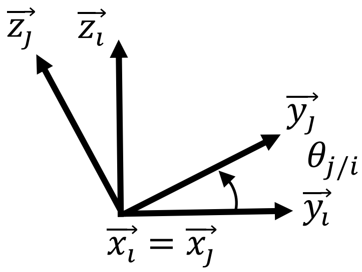
$\overrightarrow{\Omega_{10}}$	$\overrightarrow{\Omega_{21}}$
$\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_1}$	$\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_2}$

Question 3: Calculer la vitesse de l'extrémité D de la pâle $\vec{V}(D,2/0)$ à l'aide de la définition du vecteur vitesse en fonction de R, L, $\dot{\theta}_{1/0}$, $\dot{\theta}_{2/1}$ et des vecteurs de base..

$$\vec{V}(D,2/0)=\vec{V}(D,2/1)+\vec{V}(D,1/0)$$

$$\vec{V}(D,2/1)=\vec{V}(C,2/1)+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{21}}=-L\overrightarrow{y_2}\wedge\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_2}=L\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2}$$

$$\vec{V}(D,1/0)=\vec{V}(A,1/0)+\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}}=(-L\overrightarrow{y_2}-R\overrightarrow{x_2}-H\overrightarrow{z_1})\wedge\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_1}$$
$$\vec{V}(D,1/0)=-L\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_2}\wedge\overrightarrow{z_1}-R\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_1}$$



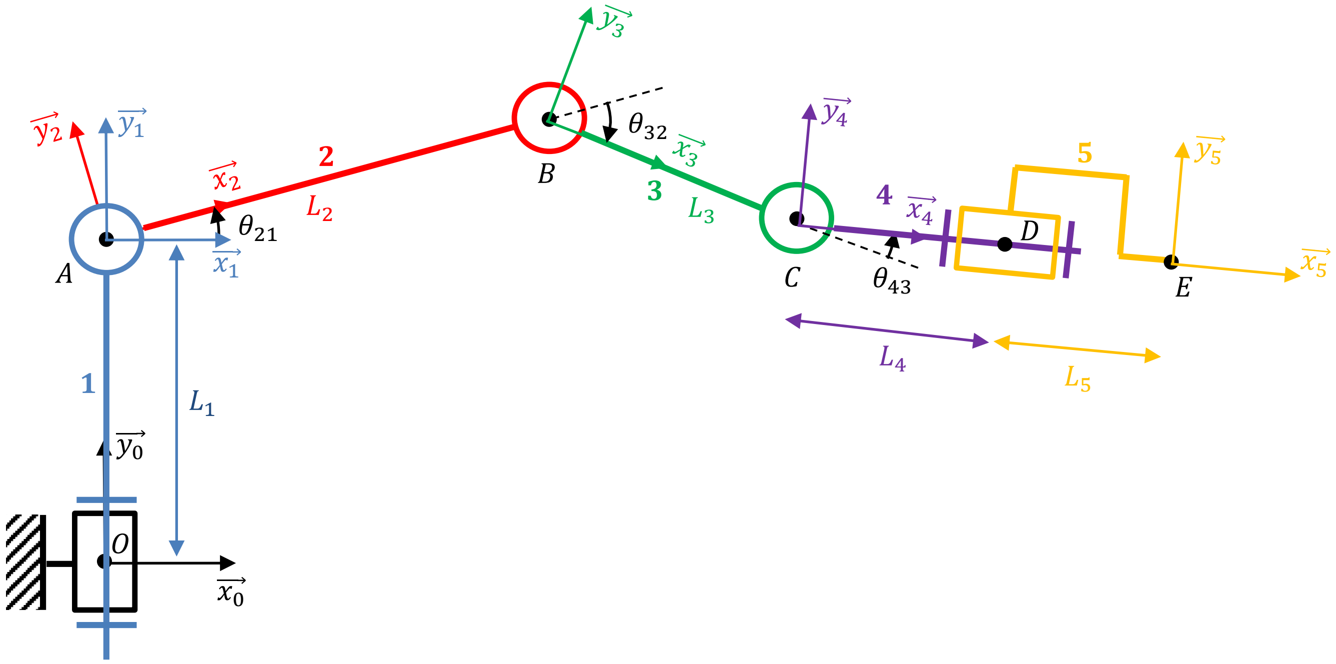
$$\overrightarrow{y_j}=\cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i}+\sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{z_i}$$
$$\overrightarrow{z_j}=-\sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i}+\cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{z_i}$$

$$\overrightarrow{y_2}\wedge\overrightarrow{z_1}=\begin{pmatrix}0\\ \cos\theta_{21}\\ \sin\theta_{21}\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}=\begin{pmatrix}\cos\theta_{21}\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}=\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1}$$
$$\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{z_1}=-\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(D,1/0)=-L\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1}+R\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(D,2/0)=L\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2}-L\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1}+R\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

Exercice 2: Bras manipulateur ERICC 3



Cas général

Question 1: Exprimer le vecteur position du point E par rapport au bâti.

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{OE} = \lambda_{10}\overrightarrow{y_0} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3} + (L_4 + L_5)\overrightarrow{x_4}$$

Question 2: Exprimer les différents vecteurs rotation du système.

$\overrightarrow{\Omega_{10}}$	$\overrightarrow{\Omega_{21}}$	$\overrightarrow{\Omega_{32}}$	$\overrightarrow{\Omega_{43}}$	$\overrightarrow{\Omega_{54}}$
$\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$	$\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_1}$	$\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_1}$	$\dot{\theta}_{43}\overrightarrow{z_1}$	$\dot{\theta}_{54}\overrightarrow{x_5}$

Question 3: Déterminer la vitesse $\vec{V}(E,5/0)$ par la définition

$$\vec{V}(E,2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OE}}{dt}\right)_0$$

$$\vec{V}(E,2/0) = L_2\overrightarrow{\Omega_{20}} \wedge \overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{\Omega_{30}} \wedge \overrightarrow{x_3} + \dot{\lambda}_{54}\overrightarrow{x_4} + (L_4 + L_5)\overrightarrow{\Omega_{50}} \wedge \overrightarrow{x_5}$$

$$\vec{V}(E,2/0) = L_2\left(\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \overrightarrow{x_2} + L_3\left(\left(\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}\right)\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \overrightarrow{x_3}$$
$$+ (L_4 + L_5)\left(\left(\dot{\theta}_{43} + \dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21}\right)\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}\right) \wedge \overrightarrow{x_5}$$

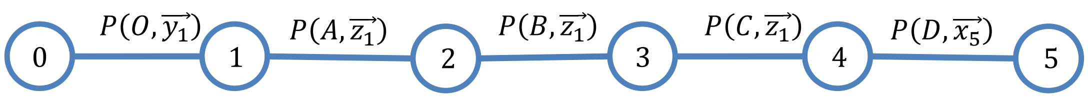
$$\vec{V}(E,2/0) = \left(L_2\dot{\theta}_{21}\vec{z_1}\wedge\vec{x_2} + L_2\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}\wedge\vec{x_2}\right) + \left(L_3(\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})\vec{z_1}\wedge\vec{x_3} + L_3\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}\wedge\vec{x_3}\right)$$
$$+ \left((L_4+L_5)(\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})\vec{z_1}\wedge\vec{x_5} + (L_4+L_5)\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}\wedge\vec{x_5}\right)$$

$$\vec{y_1}\wedge\vec{x_2} = -\cos\theta_{21}\,\vec{z_1}$$
$$\vec{y_1}\wedge\vec{x_3} = -\cos(\theta_{32}+\theta_{21})\,\vec{z_1}$$
$$\vec{y_1}\wedge\vec{x_5} = -\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21})\,\vec{z_1}$$
$$\vec{z_1}\wedge\vec{x_2} = \vec{z_2}\wedge\vec{x_2} = \vec{y_2}$$
$$\vec{z_1}\wedge\vec{x_3} = \vec{z_3}\wedge\vec{x_3} = \vec{y_3}$$
$$\vec{z_1}\wedge\vec{x_5} = \vec{z_4}\wedge\vec{x_4} = \vec{y_4} \quad ; \quad Attention\ \vec{z_4}\neq\vec{z_5}$$

$$\vec{V}(E,2/0) = \left(L_2\dot{\theta}_{21}\vec{y_2} - L_2\dot{\theta}_{10}\cos\theta_{21}\,\vec{z_1}\right) + \left(L_3(\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})\vec{y_3} - L_3\dot{\theta}_{10}\cos(\theta_{32}+\theta_{21})\,\vec{z_1}\right)$$
$$+ \left((L_4+L_5)(\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})\vec{y_4} - (L_4+L_5)\dot{\theta}_{10}\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21})\,\vec{z_1}\right)$$

$$\vec{V}(E,2/0) = \boldsymbol{L_2\dot{\theta}_{21}\vec{y_2}} + \boldsymbol{L_3(\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})\vec{y_3}} + \boldsymbol{(L_4+L_5)(\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})\vec{y_4}}$$
$$\boldsymbol{-\,\dot{\theta}_{10}\left(L_2\cos\theta_{21} + (L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21})\right)\vec{z_1}}$$

Question 4: Etablir le graphe des liaisons du système.



Question 5: Déterminer la vitesse $\vec{V}(E,5/0)$ par composition du mouvement

$$\vec{V}(E,5/0) = \vec{V}(E,5/4) + \vec{V}(E,4/3) + \vec{V}(E,3/2) + \vec{V}(E,2/1) + \vec{V}(E,1/0)$$

$$\vec{V}(E,5/4) = \vec{V}(D,5/4) + \vec{ED}\wedge\overrightarrow{\Omega_{54}} = -L_5\vec{x_5}\wedge\dot{\theta}_{54}\vec{x_5} = \vec{0}$$

$$\vec{V}(E,4/3) = \vec{V}(C,4/3) + \vec{EC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{43}}$$
$$= -(L_4+L_5)\vec{x_5}\wedge\dot{\theta}_{43}\vec{z_4}$$
$$= \dot{\theta}_{43}(L_4+L_5)\vec{y_4}$$

Attention : $\vec{z_4}\neq\vec{z_5}$

$$\vec{V}(E,3/2) = \vec{V}(B,3/2) + \vec{EB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{32}}$$
$$= -[(L_4+L_5)\vec{x_5} + L_3\vec{x_3}]\wedge\dot{\theta}_{32}\vec{z_3}$$
$$= \dot{\theta}_{32}(L_4+L_5)\vec{y_4} + \dot{\theta}_{32}L_3\vec{y_3}$$

$$\vec{V}(E,2/1) = \vec{V}(B,2/1) + \vec{EB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{21}}$$
$$= -[(L_4+L_5)\vec{x_5} + L_3\vec{x_3} + L_2\vec{x_2}]\wedge\dot{\theta}_{21}\vec{z_2}$$
$$= \dot{\theta}_{21}(L_4+L_5)\vec{y_4} + \dot{\theta}_{21}L_3\vec{y_3} + \dot{\theta}_{21}L_2\vec{y_2}$$

$$\vec{V}(E,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \vec{EA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}}$$
$$= -[(L_4+L_5)\vec{x_5} + L_3\vec{x_3} + L_2\vec{x_2} + \lambda_{10}\vec{y_0}]\wedge\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}$$

$$= -\left(\dot{\theta}_{10}(L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_2\cos(\theta_{21})\right)\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{V}(E,5/0) = \dot{\theta}_{43}(L_4+L_5)\overrightarrow{y_4} + \dot{\theta}_{32}(L_4+L_5)\overrightarrow{y_4} + \dot{\theta}_{32}L_3\overrightarrow{y_3} + \dot{\theta}_{21}(L_4+L_5)\overrightarrow{y_4} + \dot{\theta}_{21}L_3\overrightarrow{y_3} + \boldsymbol{\dot{\theta}_{21}L_2\overrightarrow{y_2}} - \boldsymbol{\left(\dot{\theta}_{10}(L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_2\cos(\theta_{21})\right)\overrightarrow{z_1}}$$

$$\vec{V}(E,5/0) = \boldsymbol{(\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})(L_4+L_5)\overrightarrow{y_4}} + \boldsymbol{(\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})L_3\overrightarrow{y_3}} + \boldsymbol{\dot{\theta}_{21}L_2\overrightarrow{y_2}} - \boldsymbol{\dot{\theta}_{10}\left((L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + L_2\cos(\theta_{21})\right)\overrightarrow{z_1}}$$

Question 6: Déterminer les conditions permettant de déplacer le point E horizontalement, uniquement suivant $\overrightarrow{x_1}$.

$$\begin{cases} \vec{V}(E,5/0).\overrightarrow{y_1} = 0 \\ \vec{V}(E,5/0).\overrightarrow{z_1} = 0 \end{cases}$$

Condition sur $\overrightarrow{z_1}$:

$$\vec{V}(E,5/0).\overrightarrow{z_1} = 0$$

$$(\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})(L_4+L_5)\overrightarrow{y_4}.\overrightarrow{z_1} + (\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})L_3\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}_{21}L_2\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{z_1} - \left(\dot{\theta}_{10}(L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_2\cos(\theta_{21})\right)\overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{z_1} = 0$$

$$\overrightarrow{y_4}.\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{z_1} = 0$$

$$-\left(\dot{\theta}_{10}(L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_2\cos(\theta_{21})\right) = 0$$

$$\dot{\theta}_{10}\left((L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + L_2\cos(\theta_{21})\right) = 0$$

=

$$f(t)g(t) = 0\ \forall t$$

Or, $g(t)$ dépend de la géométrie et n'est pas toujours nul. Donc $f(t) = 0$

$$\boldsymbol{\dot{\theta}_{10} = 0}$$

Condition sur $\overrightarrow{y_1}$:

$$\vec{V}(E,5/0).\overrightarrow{y_1} = 0$$

$$(\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})(L_4+L_5)\overrightarrow{y_4}.\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})L_3\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{21}L_2\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{y_1} - \left(\dot{\theta}_{10}(L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot{\theta}_{10}L_2\cos(\theta_{21})\right)\overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{y_1} = 0$$

$$\overrightarrow{z_1}.\overrightarrow{y_1} = 0$$

$$(\dot{\theta}_{43}+\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})(L_4+L_5)\overrightarrow{y_4}.\overrightarrow{x_1} + (\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21})L_3\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}_{21}L_2\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{x_1} = 0$$

$$\overrightarrow{y_4}.\overrightarrow{y_1} = \cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21})$$
$$\overrightarrow{y_3}.\overrightarrow{y_1} = \cos(\theta_{32}+\theta_{21})$$
$$\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{y_1} = \cos(\theta_{21})$$

$$\left(\dot\theta_{43}+\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}\right)(L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + \left(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}\right)L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot\theta_{21}L_2\cos(\theta_{21}) = 0$$

Soit au final :

$$\begin{cases} \dot\theta_{10} = 0 \\ \left(\dot\theta_{43}+\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}\right)(L_4+L_5)\cos(\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21}) + \left(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}\right)L_3\cos(\theta_{32}+\theta_{21}) + \dot\theta_{21}L_2\cos(\theta_{21}) = 0 \end{cases}$$

Mouvement particulier

Prenons les hypothèses suivantes :
Chaque longueur est identique : $L_4 + L_5 = L_3 = L_2 = L$
La pièce 4 reste horizontale : $\theta_{43}+\theta_{32}+\theta_{21} = 0$ et $\dot\theta_{43}+\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21} = 0$

Question 7: Simplifier les conditions obtenues dans le cas proposé afin d'obtenir en particulier une relation entre $\dot{\boldsymbol\theta}_{32}$, $\dot{\boldsymbol\theta}_{21}$, $\boldsymbol\theta_{43}$ et $\boldsymbol\theta_{21}$

$$\theta_{32}+\theta_{21} = -\theta_{43}$$

$$\begin{cases} \dot\theta_{10} = 0 \\ (0)L\cos(0) + \left(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}\right)L\cos(\theta_{43}) + \dot\theta_{21}L\cos(\theta_{21}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot\theta_{10} = 0 \\ \left(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}\right)\cos(\theta_{43}) + \dot\theta_{21}\cos(\theta_{21}) = 0 \end{cases}$$

Question 8: En déduire l'expression de $\dot{\boldsymbol\theta}_{32}$ en fonction de $\dot{\boldsymbol\theta}_{21}$ permettant de garder les pièces 4 et 5 horizontales et d'imposer au point $\boldsymbol D$ un déplacement horizontal

$$\left(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}\right)\cos(\theta_{43}) + \dot\theta_{21}\cos(\theta_{21}) = 0$$
$$\dot\theta_{32}\cos(\theta_{43}) + \dot\theta_{21}\cos(\theta_{43}) + \dot\theta_{21}\cos(\theta_{21}) = 0$$
$$\dot\theta_{32}\cos(\theta_{43}) + \dot\theta_{21}(\cos(\theta_{43}) + \cos(\theta_{21})) = 0$$
$$\dot\theta_{32} = -\dot\theta_{21}\left(\frac{\cos(\theta_{43}) + \cos(\theta_{21})}{\cos(\theta_{43})}\right)$$

$$\dot\theta_{32} = -\dot\theta_{21}\left[1 + \frac{\cos(\theta_{21})}{\cos(\theta_{43})}\right]$$

Question 9: Quelle relation existe-t-il à tout instant entre $\boldsymbol{\theta_{21}}$ et $\boldsymbol{\theta_{43}}$

$$\theta_{21} = \theta_{43}$$

Question 10: Déterminer la relation liant $\dot{\theta}_{43}$ et $\dot{\theta}_{32}$ à $\dot{\theta}_{21}$.

$$\dot{\theta}_{32} = -\dot{\theta}_{21}\left[1 + \frac{\cos(\theta_{21})}{\cos(\theta_{43})}\right] = -2\dot{\theta}_{21}$$

$$\dot{\theta}_{43} + \dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} = 0$$
$$\dot{\theta}_{43} - 2\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{21} = 0$$
$$\dot{\theta}_{43} = \dot{\theta}_{21}$$

Soit au final :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{10} = 0 \\ \dot{\theta}_{21} = Entrée \\ \dot{\theta}_{32} = -2\dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{43} = \dot{\theta}_{21} \end{cases}$$

Question 11: Récapituler les conditions imposées aux 5 moteurs en fonction de $\boldsymbol{\dot{\theta}}$ afin d'obtenir le mouvement souhaité.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{10} = 0 \\ \dot{\theta}_{21} = \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_{32} = -2\dot{\theta} \\ \dot{\theta}_{43} = \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_{54}\ quelconque \end{cases}$$

Vitesse de rotation à imposer

Question 12: Déterminer la norme $\boldsymbol{V_E}$ de la vitesse $\boldsymbol{\vec{V}(E,5/0)}$ pour le cas étudié en fonction de $\boldsymbol{\dot{\theta}}$, $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{\theta}$.

$$\begin{aligned}\vec{V}(E,5/0) = {} & L_2\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{y_2} + L_3(\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21})\overrightarrow{y_3} + (L_4 + L_5)(\dot{\theta}_{43} + \dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21})\overrightarrow{y_4} \\ & - \dot{\theta}_{10}(L_2\cos\theta_{21} + (L_4 + L_5)\cos(\theta_{43} + \theta_{32} + \theta_{21}) + L_3\cos(\theta_{32} + \theta_{21}))\overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_{10} = 0$$
$$\dot{\theta}_{43} + \dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} = 0$$
$$L_2 = L_3 = L$$
$$\vec{V}(E,5/0) = L\dot{\theta}\overrightarrow{y_2} + L_3(-2\dot{\theta} + \dot{\theta})\overrightarrow{y_3}$$
$$\vec{V}(E,5/0) = L\dot{\theta}(\overrightarrow{y_2} - \overrightarrow{y_3})$$

On sait que le résultat sera suivant sera uniquement suivant $\overrightarrow{x_1}$, on projette ce résultat dans la base 1 :

$$\vec{V}(E,5/0) = L\dot{\theta}(-\sin\theta_{21}\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{21}\overrightarrow{y_1} + \sin(\theta_{32}+\theta_{21})\overrightarrow{x_1} - \cos(\theta_{32}+\theta_{21})\overrightarrow{y_1})$$

On sait que :

$$\theta_{32}+\theta_{21} = -\theta_{43} \quad ; \quad \theta_{21} = \theta_{43}$$
$$\theta_{32}+\theta_{21} = -\theta_{21}$$

$$\vec{V}(E,5/0) = L\dot{\theta}(-\sin\theta_{21}\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{21}\overrightarrow{y_1} + \sin(-\theta_{21})\overrightarrow{x_1} - \cos(-\theta_{21})\overrightarrow{y_1})$$
$$\vec{V}(E,5/0) = L\dot{\theta}(-\sin\theta_{21}\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{21}\overrightarrow{y_1} - \sin(\theta_{21})\overrightarrow{x_1} - \cos(\theta_{21})\overrightarrow{y_1})$$

$$\vec{V}(E,5/0) = -2L\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{x_1}$$
$$V_E = \left\|\vec{V}(E,5/0)\right\| = 2L\dot{\theta}\sin\theta$$

Question 13: En déduire l'expression de $\cos(\theta(t))$ en fonction V_E, L et du temps t.

$$\dot{\theta} = \frac{V_E}{2L\sin\theta}$$

$$\dot{\theta}\sin\theta = \frac{V_E}{2L}$$
$$-\cos'\theta = \frac{V_E}{2L}$$
$$\cos'\theta = -\frac{V_E}{2L}$$
$$\cos\theta = -\frac{V_E}{2L}t + k$$

La condition initiale donne :

$$\cos 0 = -\frac{V_E}{2L} * 0 + k = k = 1$$

$$\cos(\theta(t)) = 1 - \frac{V_E}{2L}t$$

Question 14: Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du temps de fonctionnement permettant au point E d'arriver sur l'axe vertical du robot.

t	$t_0 = 0$	t_1
θ	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	0
$\cos\theta = 1 - \frac{V_E}{2L}t$	1	$1 - \frac{V_E}{2L}t_1$

$$\Delta_{\cos\theta} = 0 - 1 = 1 - \frac{V_E}{2L}t_1 - 1$$

$$\Delta_{\cos\theta} = -1 = -\frac{V_E}{2L}t_1$$

$$t_1 = \frac{2L}{V_E} = \frac{D}{V} = \frac{2 * 0,1}{1} = 0,2\ s$$

Question 15: En déduire l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ à imposer en fonction du temps afin d'assurer le mouvement à horizontal à la vitesse souhaitée.

$$\cos\big(\theta(t)\big) = 1 - \frac{V_E}{2L}t$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\cos^2\theta}\ car\ \sin\theta > 0$$

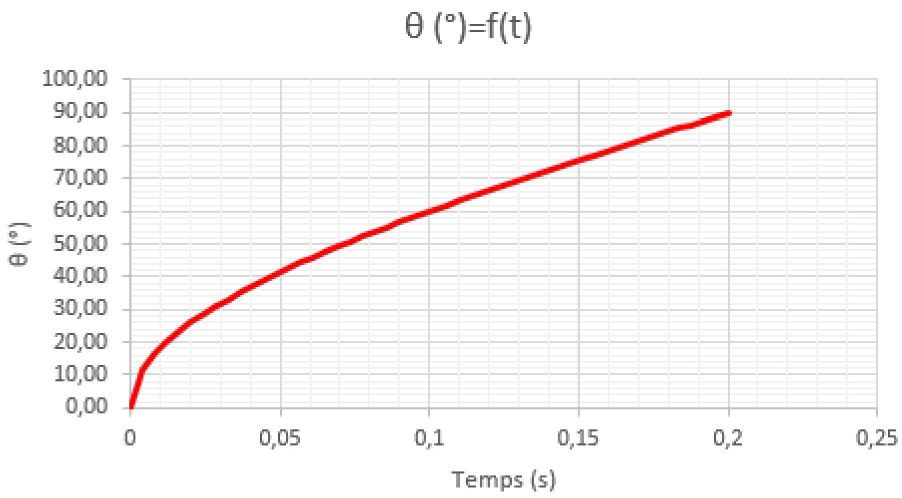
$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(1-\frac{V_E}{2L}t\right)^2} = \sqrt{1-1+2\frac{V_E}{2L}t-\left(\frac{V_E}{2L}t\right)^2} = \sqrt{\frac{V_E}{L}t-\frac{{V_E}^2}{4L^2}t^2}$$

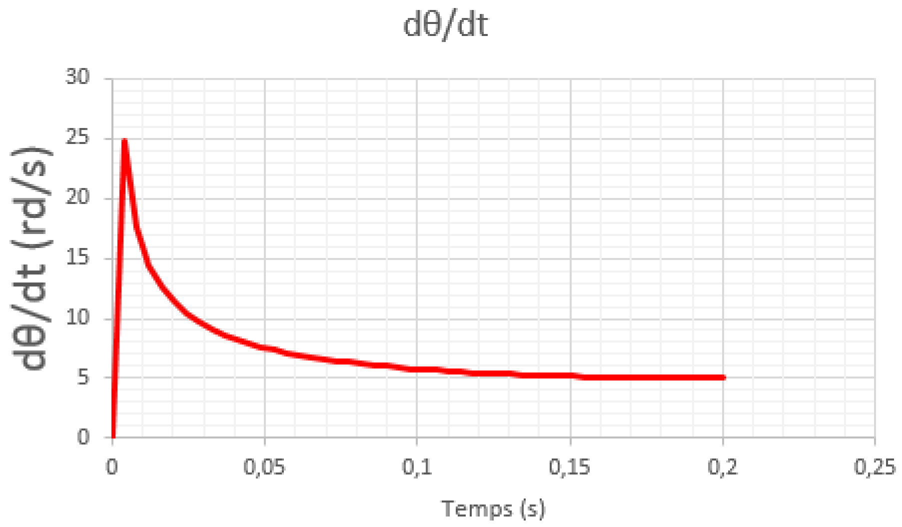
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{V_E}{L}t-\frac{{V_E}^2}{4L^2}t^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_E}{2L\sin\theta} = \dot{\theta} = \frac{V_E}{2L\sqrt{\frac{V_E}{L}t-\frac{{V_E}^2}{4L^2}t^2}} = \frac{V_E}{\sqrt{4LV_Et-{V_E}^2t^2}} = \frac{V_E}{\sqrt{V_Et(4L-V_Et)}}$$

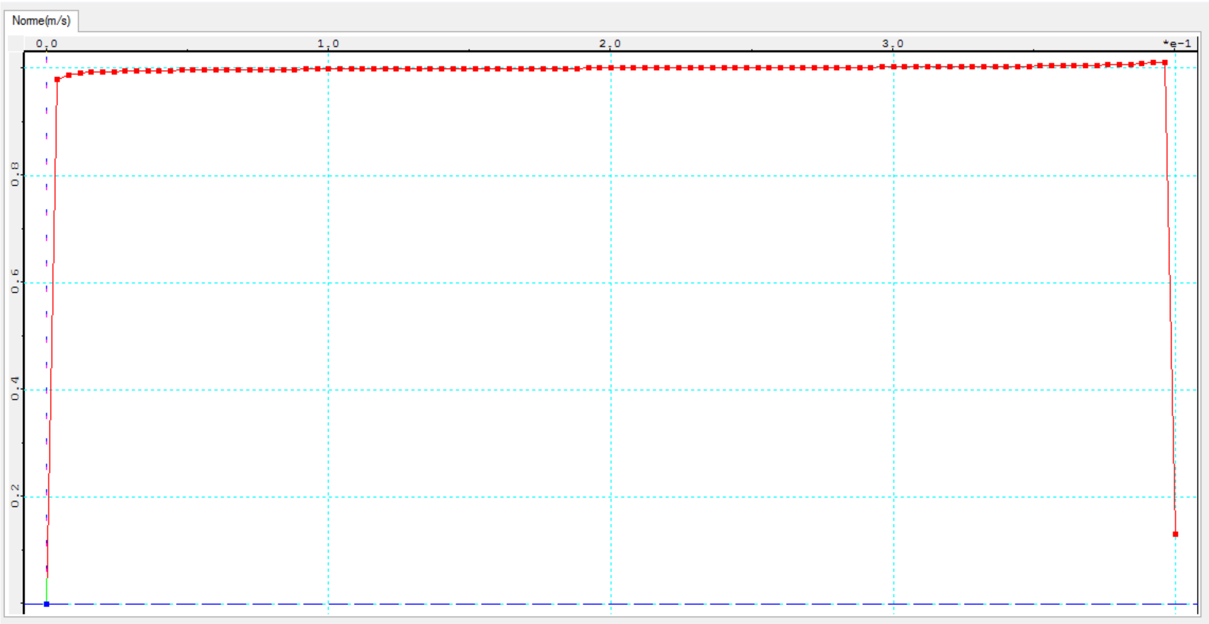
$$\dot{\theta} = \frac{V_E}{\sqrt{V_Et(4L-V_Et)}}$$

Courbes de l'Excel joint :





Résultat Méca 3D de la simulation sur 180 ° :



On est bien autour de 1m/S avec une légère différence liée aux valeurs infinies en 0 et 180 ° de la dérivée qui cause des problèmes numériques.